Poznámky a příklady. *1. Pro* $f(x) = e^{-\pi|x^2|}$ *platí* $\mathcal{F}(f) = f = \mathcal{F}^{-1}(f)$.

Definice 1 (prostory $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$)**.** *Pro* $d \in \mathbb{N}$ *definujeme Schvartzův prostor* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *jeko prostor všech funkcí* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *pro které platí*

$$||f||_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} ||x^\alpha D^\beta f(x)|| < \infty,$$

pro každou dvojici multiindexů α *a* β.

Říkáme, že posloupnost $\{f_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *konverguje k funkci* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *ve Schartzově prostoru* ($f_n \overset{\mathcal{S}}{\to} f$)*, pokud platí*

$$||f_n - f||_{\alpha,\beta} \to 0, \quad n \to \infty,$$

pro každou dvojici multiindexů α *a* β. *Dále definujeme prostor* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *jeko prostor všech funkcí* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *pro které platí*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^d$.

Poznámky a příklady. *1. Platí* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subsetneq L^1(\mathbb{R}^d)$, $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

2. Pro $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, P *polynom,* $a, b \in \mathbb{R}$*(nebo* $\mathbb{C}$*) a* α *multiindex platí*

$$af + bg, Pf, fg, D^\alpha f, f \star g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

3. pro $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *a* α *multiindex platí* $\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (i2\pi\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

4. pro $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *platí* $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$*, je-li* α *multiindex, potom* $D^\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}((-i2\pi x)^\alpha f(x))(\xi)$